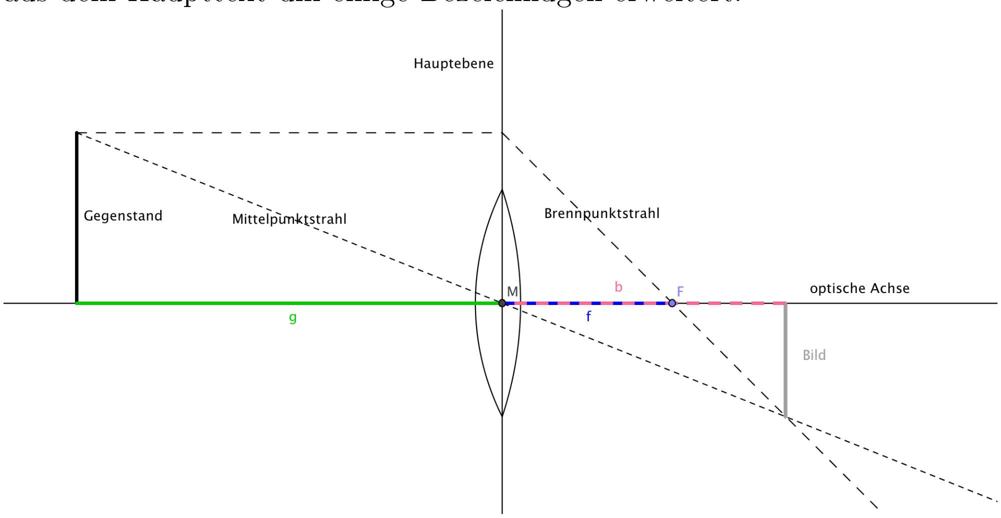
1 Das Modell optische Abbildung

Mit der (scharfen) optischen Abbildung, wie sie im Haupttext bereits vorgestellt wurde, sind einige formale Zusammenhänge verbunden, die ich hier kurz referieren will. Dazu habe ich die Skizze der Abbildungskonstruktion aus dem Haupttext um einige Bezeichnungen erweitert.



Die Brennweite einer Linse (die übrigens auf den beiden Seiten der Linse unterschiedlich sein kann, s.u.), bezeichnen wir mit f (=Abstand zwischen Mittelpunkt M und Brennpunkt F), den Abstand des Gegenstandes von der Hauptebene der Linse mit g (Gegenstandsweite) und den Abstand des Bildes von der Hauptebene mit b (Bildweite). Diese drei Größen hängen wie folgt zusammen:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \quad (Linsenformel) \tag{1}$$

Weiterhin nennen wir G die Gegenstandgröße und B die Bildgröße. Mit diesen Bezeichnungen können wir nun aus der Konstruktionszeichnung der optischen Abbildung mit Hilfe des 2. Strahlensatzes die Linsenformel (1) herleiten. Es gilt:

$$\frac{G}{g} = \frac{B}{b} \quad \text{aus dem Mittelpunktstrahl} \tag{2}$$

$$\frac{G}{f} = \frac{B}{b-f} \quad \text{aus dem Brennstrahl} \tag{3}$$

Nun dividiert man die dritte Gleichung durch die zweite und kürzt dabei B und G weg:

$$\frac{g}{f} = \frac{b}{b-f} \tag{4}$$

und erhalten mit etwas Bruchrechnung die Gleichung (1), also die Linsenformel.[1]

Diese Gleichung zeigt auch Grenzfälle der optischen Abbildung auf (wir betrachten hier nur Sammellinsen, also Linsen mit $f > 0$):

- $f \to \infty$, was bedeutet, dass die Linse keine ist, sondern eine Glasscheibe mit parallelen, nicht gekrümmten Oberflächen; das zieht nach sich, dass $\frac{1}{f} = 0$ und wegen der nichtnegativen geometrischen Größen in der obigen Linsenformel, beide beteiligten Größen auf ihrer rechten Seite ebenfalls gegen unendlich gehen müssen. Es kommt dann keine Abbildung zustande.

- Geht umgekehrt nur g $\to \infty$, dann gilt $f = b$, was bedeutet, dass die Abbildung in der Ebene des Brennpunktes liegt. Dies kommt z.B. in der Astronomie vor, wenn man (theoretisch) unendlich ferne Fixsterne beobachten will.

- Betrachten wir nun den anderen Grenzfall $f \to 0$, so wäre entweder b oder g ebenfalls 0, was wieder keine Abbildung erlaubt. Allerdings ist dieser Fall auch keiner realen Situation zuzuordnen, da eine Linse mit unendlich großer Brechkraft (man nennt $\frac{1}{f}$ auch die Brechkraft einer Linse) technisch nicht realisierbar ist.

Um Missverständnisse zu vermeiden, weise ich darauf hin, dass die verwendete Konstruktion lediglich ein Modell ist und nichts mit dem tatsächlichen Verlauf von Lichtstrahlen zu tun hat.[2] Unter den genannten Einschränkungen kann man das Bild konstruieren, aber schon bei der Frage, wie Schärfentiefe zustande kommt, ist dieses Modell nicht mehr hilfreich.

[1] Übrigens liefern Gleichung 2 und 3 auch Zusammenhänge zur Berechnung der Bildgröße bei gegebener Gegenstandsgröße und umgekehrt.

[2] Eine wahre Geschichte: Professor zeichnet bei der Physikprüfung zur Optik einen Gegenstand auf die optische Achse, der größer ist als die Linse und fordert den Prüfling auf, das Bild zu konstruieren. Student irritiert: „Das kann man nicht abbilden.“ Professor: „Wieso das?“ Student: „Der Gegenstand ist doch größer als die Linse.“ Professor ungehalten: „Sie können doch auch eine Kuh fotografieren!“ Student: „Da kann ich ja auch weiter weggehen.“ Dies zog das abrupte Ende der Prüfung nach sich ...

Trotzdem ist das bisher Gesagte ein Paradebeispiel für physikalisches Vorgehen: Nach Beobachtungen in der Natur oder dem Labor folgt die Festlegung und Beschreibung des Modells „Optische Abbildung“, also des Konstruktionsverfahrens aus dem Gegenstand sein Bild zu zeichnen. Dann benutzt man mathematische Zusammenhänge (hier Strahlensatz) um Schlüsse aus dem Modell zu ziehen und erhält die Linsenformel. Jetzt müsste man diese Formel wiederum experimentell überprüfen, d.h. durch Messungen verifizieren und auf diese Weise das Modell an der Wirklichkeit testen. Gleichzeitig zeigt sich auch die Reichweite des Modells: zur Erklärung der Schärfentiefe reicht es nicht mehr aus.
Die Brennweite, als Abstand des Brennpunktes von der Hauptebene gezeichnet und der wiederum als Sammelpunkt (Focus) parallel einfallenden Lichtes definiert, kann man unter bestimmten Voraussetzungen auch aus der Geometrie und dem Material der Linse herleiten. Dabei spielen drei Größen eine Rolle:

1. Die Wölbung der Linse, ausgedrückt durch ihre beiden (konstanten) Krümmungsradien[3] r (Eintrittsfläche) und R (Austrittsfläche), was voraussetzt, das die Oberfläche der Linse eine Kugelschale ist

2. Der Brechungsindex n' des Materials aus dem die Linse gefertigt ist

3. Der Brechungsindex n des die Linse umgebenden Materials

Dann gilt für die Brennweite folgende Formel:

$$\frac{1}{f} = \frac{n' - n}{n}(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}) \tag{5}$$

Dabei werden die Krümmungsradien vorzeichenbehaftet vorausgesetzt, d.h. bei einer bikonvexen[4] Linse haben r und R entgegengesetztes Vorzeichen, r ist positiv, R negativ.
Nehmen wir nun an, dass die Linse auf beiden Seiten die gleiche Wölbung

[3] Der Krümmungsradius einer Kurve oder Fläche hat eine spezielle mathematische Definition, die in der Differentialgeometrie festgelegt wird. Hier reicht es zum Verständnis, „Krümmungsradius“ durch „Radius“ zu ersetzen, da die Oberflächen als kugelförmig vorausgesetzt werden.

[4] Was ist konvex, was ist konkav? Das Dumme ist, dass je nach Betrachtungsrichtung das genaue Gegenteil herauskommt. Einigen wir uns für diesen Fall einfach so. Das () ist eine bikonvexe Linse, das)(ist eine bikonkave.

hat, also r = -R und das umgebende Medium die Luft (oder ein Vakuum ist); dann ist $n \approx 1$ bzw. $n = 1$ und wir erhalten:

$$\frac{1}{f} = (n' - 1) \cdot \frac{2}{r} \quad oder \quad f = \frac{r}{2(n' - 1)} \tag{6}$$

Für einen typischen Brechungsindex von 1,5 (z.B. Fensterglas) wäre dann f=r, d.h. die Brennweite gleich dem Krümmungsradius der Linse.