1 Theoretische Aussagen zum Lyapunow-Exponenten

Im Text habe ich bereits die Definition des Lyapunow-Exponenten angegeben und motiviert:

$$L(x_0) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln(|f'(x_i)|).$$

Dabei sind die x_i die Iterierten $f^i(x_0)$, also der Orbit von x_0 unter f. Die Herleitung aus der Beziehung

$$\epsilon \exp(N * L(x_0)) = |f^N(x_0 + \epsilon) - f^N(x_0)|$$

sei hier kurz aufgeschrieben. Es folgt:

$$L(x_0) = \frac{1}{N} \ln(|\frac{f^N(x_0+\epsilon) - f^N(x_0)}{\epsilon}|).$$

Der Grenzübergang $\epsilon \to 0$ liefert als Argument des Logarithmus gerade den Differentialquotienten, also die erste Ableitung:

$$L(x_0) = \frac{1}{N} \ln(|(f^N)'(x_0)|).$$

Der zweite Grenzübergang $N \to \infty$ vervollständigt die Definition:

$$L(x_0) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln(|(f^N)'(x_0)|)$$

Wie im Beweis des Satzes 2 des Anhangs „Theoretische Ergebnisse zur n-Periodizität ...“ (3) berechnet man

$$(f^N)'(x_0) = \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i)$$

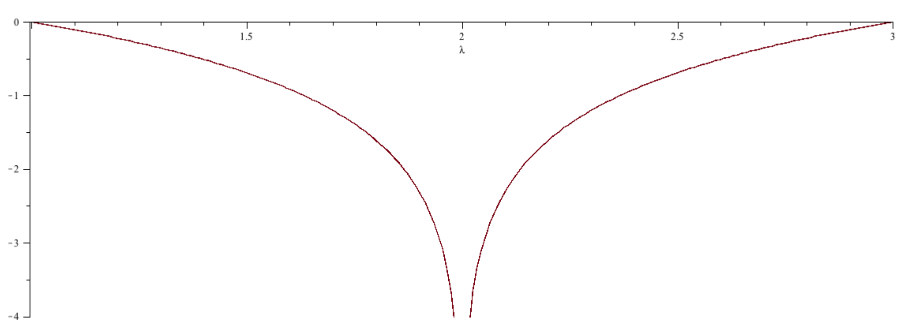
und erhält unter Anwendung der Rechenregel für den Logarithmus:

$$L(x_0) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln(|f'(x_i)|).$$

In Spezialfällen kann man den Lyapunow-Exponenten geschlossen berechnen. Für unser Beispiel $g(x) = \lambda x(1-x)$ hatten wir im Bereich $\lambda \in [1, 3]$ den Fixpunkt $x^* = 1 - \frac{1}{\lambda}$ berechnet. Setzt man ihn als Startwert x_0 in L ein, sind die Orbitwerte x_i alle gleich x*, weil eben Fixpunkt. Somit sind die Summanden in der Definition alle konstant gleich und können aus dem Summenzeichen herausgezogen werden, was den Grenzübergang für N stark vereinfacht:

$$L(x^*) = L(1 - \frac{1}{\lambda}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln(|g'(x_i)|) =$$
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln(|2-\lambda|) = \ln(|2-\lambda|) \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} 1 = \ln(|2-\lambda|)$$

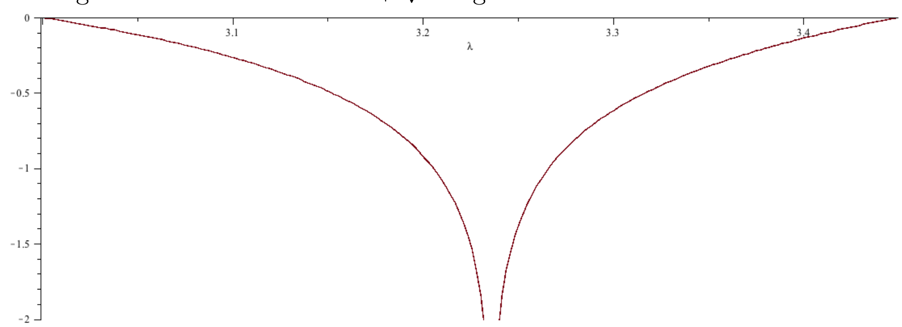
Der Logarithmus wird bei $\lambda = 2$ negativ unendlich.



Auf die gleiche Weise kann man auch für das Intervall $[3, 1 + \sqrt{6}]$ L berechnen. Hier besteht der Orbit bekanntlich aus 2 x-Werten, wie vorher bereits ermittelt: $x^*_{1,2} = \frac{1+\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-2\lambda-3}}{2\lambda}$. Egal mit welchem Wert man L berechnet, es ergibt sich das gleiche Ergebnis. Die Summe hat entsprechend 2 Summanden: $g'(x^*_1) = ln(|\lambda\frac{1+\lambda+\sqrt{\lambda^2-2\lambda-3}}{2\lambda}|)$ und $g'(x^*_2) = ln(|\lambda\frac{1+\lambda-\sqrt{\lambda^2-2\lambda-3}}{2\lambda}|)$ Durch Zusammenfassung zu einem Produkt unter dem Logarithmus und Ausmultiplizieren erhalten wir mit dengleichen Grenzwertüberlegungen wie oben:

$$L = \frac{1}{2}ln(|\lambda^2 - 2\lambda - 4|)$$

Der Logarithmus wird bei $\lambda = 1 + \sqrt{5}$ negativ unendlich.



Wie im Artikel bereits erwähnt, besteht die Frage der Existenz des Grenzwertes, sowie die Unabhängigkeit des Exponenten L von x_0. Das Buch „Nichtlineare Dynamik und Chaos“ [1] von Wolfgang Metzler gibt im Kapitel 5 eine exakte Definition des Exponenten mit Hilfe der Maßtheorie. Hier wird L (in Abhängigkeit von f) als Integral über ein invariantes, ergodisches Maß μ definiert. Unter dieser Voraussetzung erfüllt L die obige Grenzwertgleichung und ist von x_0 unabhängig. Ohne diese Voraussetzung aber, fallen beide Eigenschaften und man kann die Definiton nur mit der Zusatzbedingung der Existenz des Grenzwertes und der Abhängigkeit von x_0 machen.