1 Theoretische Aussagen zu n-Periodizität und Attraktion

Im Text habe ich zwei entscheidende Gleichungen für das Verhalten des Orbits $\{b_i\}$ einer Iteration angegeben:

- $\exists n \in \mathbb{N}, x^* \in [a,b]\; g^n(x^*) = x^*$ für die n-Periodizität und
- $|(g^n)'(x^*)| < 1$ für die Attraktoreigenschaft

Es sei daran erinnert, dass mit g^n die n-fache Hintereinanderausführung von g gemeint ist; g wiederum sei eine stetig differenzierbare Funktion, die ein Intervall [a, b] in sich selbst abbildet. Als Grundlage für die Untersuchung von Fixpunkten einer Funktion wurde im Text bereits der Banachsche Fixpunktsatz genannt; obwohl wohlbekannt, hier nochmals eine Formulierung, die besonders gut auf unsere Situation passt.

Satz 1 (Banachscher Fixpunktsatz)
Sei g eine Funktion, die ein Intervall [a, b] in sich selbst abbildet. g sei auf [a, b] eine kontrahierende Abbildung, d.h. es gibt eine Konstane $L \in [0,1)$, sodass für alle $x, y \in [a,b]$ folgende Lipschitzbedingung gilt:

$$|g(x) - g(y)| \leq L\,|x - y| \tag{1}$$

Dann gibt es genau einen Fixpunkt $x^* \in [a,b]$ mit $g(x^*) = x^*$. Für jeden Startwert $x_0 \in [a,b]$ konvergiert die Folge $\{g^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ gegen x^* für n gegen ∞. (Was nichts anders bedeutet, als dass dadurch eine konvergente Iterationsfolge definiert wird.)

Zusatz 1.1 (Differenzierbarkeit von g)
Wenn g stetig differenzierbar ist, dann ist die Lipschitzbedingung erfüllt, wenn $|g'(x)| \leq L$ auf ganz [a, b].

Zusatz 1.2 (Kontraktionseigenschaft von g^n)
Unter den Voraussetzungen von Satz 1 ist auch g^n eine Kontraktion auf [a,b] mit der Lipschitzkonstante L^n (die natürlich auch kleiner 1 ist).

Beweis:
$|g^n(x) - g^n(y)| = |g(g^{n-1}(x)) - g(g^{n-1}(y))| \leq L\,|g^{n-1}(x) - g^{n-1}(y)| \leq ... \leq L^n\,|x - y|\,\square$

Zusatz 1.3
Sei g nun eine stetig differenzierbare Funktion von einem offenen $D \subseteq \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Für ein $x^* \in D$ gelte $|g'(x^*)| < 1$. Dann gibt es ein abgeschlossenes Intervall $[x^*_-, x^*_+]$, das x^* enthält und eine Konstante c, sodass g - c $[x^*_-, x^*_+]$ in sich abbildet. Dann sind die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes für g - c in diesem Intervall erfüllt, was bedeutet, dass jedes Element dieses Intervalles als Startpunkt einer Folge $\{g^n(x_0) - c\}$ gegen x^* für n gegen ∞ verwendet werden kann.

Beweis:
Da g als stetig differenzierbar vorausgesetzt wurde, ist $|g'(x^*)|$ eine stetige Funktion auf D, die deshalb nicht nur bei x^* sondern in einer offenen Umgebung von x^* kleiner 1 ist. In diese Umgebung legen wir das Intervall $[x^*_-, x^*_+]$ so, dass es x^* enthält. Das Bild dieses Intervalls unter g ist ein Intervall $[y^*_-, y^*_+]$, mit $y^*_- := min(g)$ und $y^*_+ := max(g)$, wobei mit max und min das aufgrund der Stetigkeit von g existierende absolute Maximum bzw. Minimum auf dem abgeschlossenen Intervall $[x^*_-, x^*_+]$ ist. Da die Steigung von g in diesem Intervall zwischen -1 und 1 liegt, folgt: $\left|x^*_+ - x^*_-\right| \geq \left|y^*_+ - y^*_-\right|$ und so kann man eine Konstante c angeben, die g - c das Intervall $\left|x^*_+ - x^*_-\right|$ in sich abbilden läßt. $\square$
Als nächstes möchte ich einige nützliche Eigenschaften im Zusammenhang mit Priodizität und Attraktion zusammenstellen:

Satz 2 (Steigungsgleichheit)
Sei g wie oben vorausgetzt. Unter der weiteren Voraussetzung der n-Periodizität gilt, dass alle Steigungen von g^n an den Stellen eines n-Zyklus gleich sind.

Beweis:
Sei also $\{x_i\}_{i=0}^n$ ein n-Zyklus bzgl. g^n. Die erste Ableitung berechnet sich unter mehrfacher Anwendung der Kettenregel zu:
$(g^n)'(x) = g'(g^{n-1}(x))(g^{n-1})'(x) = g'(g^{n-1}(x)) \cdot g'(g^{n-2}(x)) \cdot \ldots \cdot g'(g(x)) \cdot g'(x)$
Setzen wir nun für x beispielsweise x_0 ein folgt:
$(g^n)'(x_0) = g'(x_{n-1}) \cdot g'(x_{n-2}) \cdot \ldots \cdot g'(x_1) \cdot g'(x_0)$
Setzt man nun nacheinander für x die x_i ein, dann bleibt die rechte Seite obiger Gleichung aufgrund der Zykluseigenschaft immer gleich (bis auf die Reihenfolge des Produktes), die linke Seite durchläuft nacheinander alle Steigungswerte an den Stellen x_i - somit sind diese Werte alle gleich groß. $\square$

Zusatz 2.1
In ähnlicher Art und Weise kann man außerdem zeigen, dass für alle Orbitwerte x_i von g^n gilt: $(g^{2n})'(x_i) = ((g^n)')^2(x_i)$. (Diese Aussage ist nur interessant in Bifurkationpunkten der Periodenverdopplung. Daraus folgt nämlich, dass dort die Steigung -1 von g^n zu +1 von g^{2n} wird.)

Beweis:
$(g^{2n})'(x) = g'(g^{2n-1}(x)) \cdot g'(g^{2n-2}(x)) \cdot ... \cdot g'(g^n(x)) \cdot$
$g'(g^{n-1})(x) \cdot ... \cdot g'(g(x)) \cdot g'(x)$
Setzen wir x_0 stellvertretend für einen Zykluswert von g^n ein:
$(g^{2n})'(x_0) = g'(x_{2n-1}) \cdot g'(x_{2n-2}) \cdot ... \cdot g'(x_n) \cdot$
$g'(x_{n-1}) \cdot ... \cdot g'(x_1) \cdot g'(x_0) =$
$(g'(x_{n-1}) \cdot ... \cdot g'(x_1) \cdot g'(x_0))^2 = ((g^n)')^2(x_0)\Box$

Zusatz 2.2
Im Beweis zu Satz 2 wurde folgende Eigenschaft der ersten Ableitung von g^n gezeigt: $(g^n)'(x) = g'(x) \cdot weitereTerme$. Somit ist eine Nullstelle der 1. Ableitung von g auch eine Nullstelle von $(g^n)'$.

Satz 3 (mehrfache Nullstellen bei Verkettung von Funktionen)
Sei $g : [a,b] \to [a,b]$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion derart, dass $g(x^*) = x^*$, also $g(x) - x$ eine Nullstelle in x^* hat bzw. Fixpunkt von g ist. Dann hat $g^2(x) - x$ unter der Voraussetzung
(a) $|g'(x^*)| = 1$ eine (mindestens) zweifache Nullstelle bei x^*. Gilt
(b) $g'(x^*) = -1$, so ist die Nullstelle sogar (mindestens) dreifach.

Beweis:
Zu (a):
$g^2(x^*) = g(g(x^*)) = g(x^*) = x^*$, somit ist x^* Nullstelle von g^2. Bilden wir nun die erste Ableitung:
$(g^2(x) - x)' = (g(g(x)))' - 1 = g'(g(x)) \cdot g'(x) - 1$ und verwenden, dass x^* Fixpunkt ist, ergibt sich als Bedingung für eine doppelte Nullstelle: $(g'(x^*))^2 - 1 = (g'(x^*) - 1)(g'(x^*) + 1) = 0$ und damit die Behauptung (a).
Zu (b):
Dazu berechnen wir die 2. Ableitung:
$(g^2(x) - x)'' =$
$(g'(g(x)) \cdot g'(x))' =$
$(g'(g(x)))' \cdot g'(x) + g'(g(x)) \cdot g''(x) =$

$g''(g(x)) \cdot g'(x) \cdot g'(x) + g'(g(x)) \cdot g''(x) =$
$g''(g(x)) \cdot (g'(x))^2 + g'(g(x)) \cdot g''(x)$
Und wieder benutzen wir die Tatsache, dass x^* Fixpunkt ist und (a) und setzen ein: $g''(x^*) + g'(x^*) \cdot g''(x^*) = g''(x^*) \cdot (1 + g'(x^*))$, was zu Null wird, wenn $g'(x^*) = -1$, also (b) gilt. $\square$

Zusatz 3.1
Für $g^3(x) - x$ läßt sich auf die gleiche Art und Weise zeigen, dass unter der Voraussetzung $g'(x^*) = 1$ eine (mindestens) zweifache Nullstelle bei x^* vorliegt.

Beweis:
x^* ist Nullstelle von g^3.
$(g^3(x) - x)' = g'(g^2(x)) \cdot (g^2(x))' - 1 = g'(g^2(x)) \cdot g'(g(x)) \cdot g'(x) - 1$
Setzen wir nun wieder x^* ein, ergibt sich

$$(g'(x^*))^3 - 1 = (g'(x^*) - 1) \cdot ((g'(x^*))^2 + g'(x^*) + 1).\square$$

Bei diesen Herleitungen zu den Sätzen 2 und 3 und ihren Zusätzen wurde kein spezielles Aussehen von g verwendet.
Besonders interessant sind Eigenschaften, die die g^n in einem Verzweigungspunkt haben. Im Kapitel über das Feigenbaumdiagramm wird diese Begriffsbildung anschaulich eingeführt, schon hier einige nützliche Eigenschaften dazu.
Die Untersuchung der beiden obigen Gleichungen für wachsendes n ist nur bis n = 2 ohne numerische Hilfsmittel möglich. Ich habe in dem Dokument „Praktische Ergebnisse zu n-Periodizität und Attraktion“ (4) mit Hilfe des Computeralgebraprogrammes Maple einige Aussagen zu

$$g_\lambda(x) = \lambda x(1 - x).$$

zusammengestellt. Folgende Ergebnisse sind dabei herausgekommen:

Satz 4
Seien λ_k die Bifurkationspunkte und Λ_k die Stellen an denen die jeweiligen Äste die Gerade $x = \frac{1}{2}$ (kritischer Punkt) schneidet (Dass es diese Punkte gibt, muß man beweisen, sie dazu Anhang (5).) Dann gelten folgende Aussagen:

(a) $(g_\lambda^n)'(\frac{1}{2}) = 0$
Erl.: Im kritischen Punkt sind mit $g'_\lambda(\frac{1}{2})$ *auch alle Ableitungen der Iterierten gleich Null.*

(b) $g_{\Lambda_k}^{2^k}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$
Erl.: So ist Λ_k *gerade definiert.*

(c) $(g_{\lambda_{k+1}}^{2^k})'(x_i) = -1$ *für alle Iterierten* x_i *des* 2^k*-Zyklus an der Stelle* λ_{k+1}

(d) $(g_{\lambda_{k+1}}^{2^{k+1}})'(x_i) = 1$ *für alle Iterierten* x_i *des* 2^k*-Zyklus an der Stelle* λ_{k+1} *(das sind die gleichen* x_i *wie in (c))*
Erl.: Folgt aus (c) mit Zusatz 2.1

(e) $1 > (g_\lambda^{2^k})'(x_i) > -1$ *für alle Iterierten* x_i *des* 2^k*-Zyklus an Stellen* $\lambda \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$
Erl.: Beide Ungleichungen können aus der Knettheorie hergeleitet werden (siehe Anhang (5)).

(f) $(g_\lambda^{2^k})'(x_i) < -1$ *für alle Iterierten* x_i *des* 2^k*-Zyklus an Stellen* $\lambda > \lambda_k$