1 Die Transformation der diskretisierten logistischen Gleichung

Die beiden im Text angegebenen linearen Transformationen T_0 und T_1 überführen die Diskretisierung der logistischen Differentialgleichung auf die logistische Gleichung für die Fälle r > 0 und r < 0. Dies läßt sich recht einfach nachweisen, indem man die logistische Gleichung

$$b_{n+1} = \lambda b_n(1 - b_n) \tag{1}$$

gemäß $b_n = T_i(B_n), i = 0$ oder $i = 1$ umformt. Zur Erinnerung (bei h>0 und M>0):

$$\begin{array}{rcl} T_0 : [0, M] & \to & [0, 1) \\ x & \mapsto & \dfrac{R}{1 + RM} x \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} T_1 : [0, M] & \to & [0, 1) \\ x & \mapsto & \dfrac{R}{1 - RM} (x - M) \end{array}$$

mit R = rh, $\lambda = 1 \pm RM$, wobei für T_0 das Pluszeichen und für T_1 das Minuszeichen genommen werden muss.
Bemerkung: Der Wertebereich [0, 1) wird für kein M ausgeschöpft, m.a.W. $T_i([0, M]) \subset [0, 1)$, aber für $M \to \infty$ geht $T_0(M) = \frac{RM}{1+RM}$ bzw. $T_1(0) = \frac{-RM}{1-RM} \to 1$
Beispielhaft sei die Rechnung für T_0 skizziert:
$b_{n+1} = \lambda b_n(1 - b_n) \Leftrightarrow$

$T_0(B_{n+1}) = \lambda T_0(B_n)(1 - T_0(B_n)) \Leftrightarrow$

$\frac{R}{1+RM} B_{n+1} = (1 + RM) \frac{R}{1+RM} B_n(1 - \frac{R}{1+RM} B_n) \Leftrightarrow$

$B_{n+1} = (1 + RM)B_n(1 - \frac{R}{1+RM} B_n) \Leftrightarrow$

$B_{n+1} = B_n + RB_n(M - B_n)$
Wieso muss hier r $>$ 0 sein? Nun, $r > 0 \Leftrightarrow R = rh > 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 + RM > 1$.

Aber hier ist auch interessant, wie man überhaupt auf diese Transformationen kommt. Da eine lineare Transformation verwendet werden soll, um von b_n nach B_n zu kommen, ist ein Ansatz der Form $T(x) = \alpha x + \beta$ zugrunde zu legen. Mit $b_n = T(B_n) = \alpha B_n + \beta$ folgt mit $\alpha \neq 0$:

$\alpha B_{n+1} + \beta = \lambda(\alpha B_n + \beta)(1 - \alpha B_n - \beta) \Leftrightarrow$
$B_{n+1} = \frac{1}{\alpha}(\lambda(\alpha B_n + \beta)(1 - \alpha B_n - \beta) - \beta) \Leftrightarrow$
$B_{n+1} = (\lambda - 2\lambda\beta)B_n - \lambda\alpha B_n^2 + \beta\frac{\lambda-\lambda\beta-1}{\alpha}$
Andererseits:
$B_{n+1} = B_n + RB_n(M - B_n) = (1 + RM)B_n - RB_n^2$

Durch Koeffizientenvergleich bezogen auf B_n und B_n^2 folgt zunächst, dass $\beta\frac{\lambda-\lambda\beta-1}{\alpha} = 0$
Dies ist eine quadratische Gleichung in β mit den Lösungen I) $\beta = 0$ und II) $\beta = \frac{\lambda-1}{\lambda}$.
Im Fall I) berechnet sich $\lambda = 1 + RM$ und $\alpha = \frac{R}{1+RM}$ und damit $T = T_0$. Im Fall II) kommt $\lambda = 1 - RM$ und $\alpha = \frac{R}{1-RM}$ und damit $T = T_1$ heraus.