1 Die kontinuierliche logistische Gleichung

Die kontinuierliche logistische Gleichung ist eine Anfangswertaufgabe einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\begin{aligned} B : [0, \infty] &\rightarrow [0, \infty] \\ t &\mapsto B(t) \end{aligned}$$

$$B'(t) = rB(t)(M - B(t)), \text{ wobei r} \in \mathbb{R} \text{ und M} \in \mathbb{R}^+ \tag{1}$$

Als Anfangsbedingung setzen wir $B(0) = B_0$ mit $B_0 \in (0, M)$.
Die Lösung, die ich hier kurz skizzieren will, berechnet sich mit Hilfe des Verfahrens der Trennung der Variablen.

$\frac{dB}{dt} = rB(t)(M - B(t))$

Sortieren nach Variablen B und t:

$\frac{dB}{BM-B^2} = rdt$

Integrieren nach B und t:

$\int \frac{dB}{BM-B^2} = \int tdt$

Die Stammfunktion auf der linken Seite findet man durch Partialbruchzerlegung

$ln(B) - ln(M - B) = rMt + C$

Auf beiden Seiten die e-Funktion anwenden

$\frac{B}{M-B} = Ce^{rMt}$

Nach B auflösen:

$B(t) = \frac{M}{Ce^{-rMt}+1}$

Jetzt den Anfangswert berücksichtigen um C zu bestimmen.

$B(0) = B_0 = \frac{M}{C+1}$

Nach C auflösen:

$C = \frac{M-B_0}{B_0}$

und C in die Lösung der Differentialgleichung einsetzen.

$B(t) = \frac{MB_0}{B_0+(B_0-M)e^{-rMt}}$ Lösung der Anfangswertaufgabe

Durch eine weitere Umformung erkennt man Eigenschaften dieser Lösung:

$$B(t) = M\frac{1}{1+e^{-rMt}(\frac{M}{B_0}-1)} \tag{2}$$

Mit den Voraussetzungen über B_0 und M folgt:

$\frac{M}{B_0} - 1 > 0$ und damit auch $1 + e^{-rMt}(\frac{M}{B_0} - 1) > 1$ und somit $B(t) < M$; ebenso leicht sieht man, dass $B(t) > 0$.
Also liegt B(t) zwischen 0 und M:

$$0 < B(t) < M \tag{3}$$

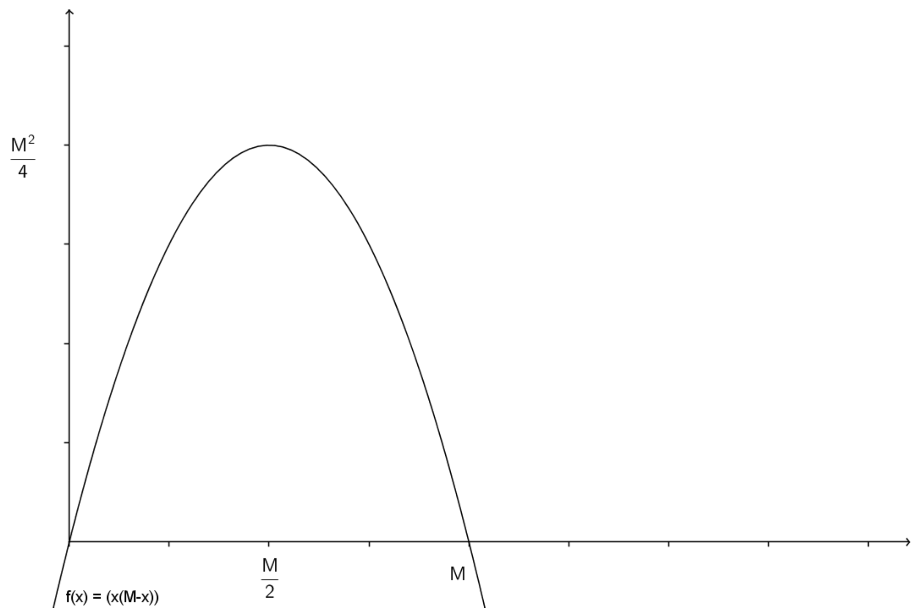
Die denkbaren Anfangswerte $B_0 = 0$ oder $B_0 = M$ liefern die konstanten Lösungen $B = 0$ und $B = M$.
Mit der Darstellung (2) gelingt auch sehr einfach die Bestimmung des Grenzwertes für $t \to \infty$. Es gilt:

Für $r > 0 : \lim_{t\to\infty} B(t) = M$,
für $r < 0 : \lim_{t\to\infty} B(t) = 0$,
für $r = 0 : B(t) = B_0$.

Für die erste und die zweite Ableitung der Lösungsfunktion kann man nun mit Hilfe der Differentialgleichung Abschätzungen herleiten. Unter den Voraussetzungen $M \in \mathbb{R}^+$ und $r \in \mathbb{R}$ sowie $B_0 \neq 0$ folgt mit (3) sofort:

$$|B'(t)| \leq |r|M^2 \tag{4}$$

Eine bessere Abschätzung erhält man, wenn man die Funktion $f(x) = x(M - x)$ auf dem Intervall [0, M] untersucht. Der Scheitelpunkt und gleichzeitig das Maximum dieser nach unten geöffnete Parabel liegt bei $x = \frac{M}{2}$ und hat den y-Wert $\frac{M^2}{4}$.



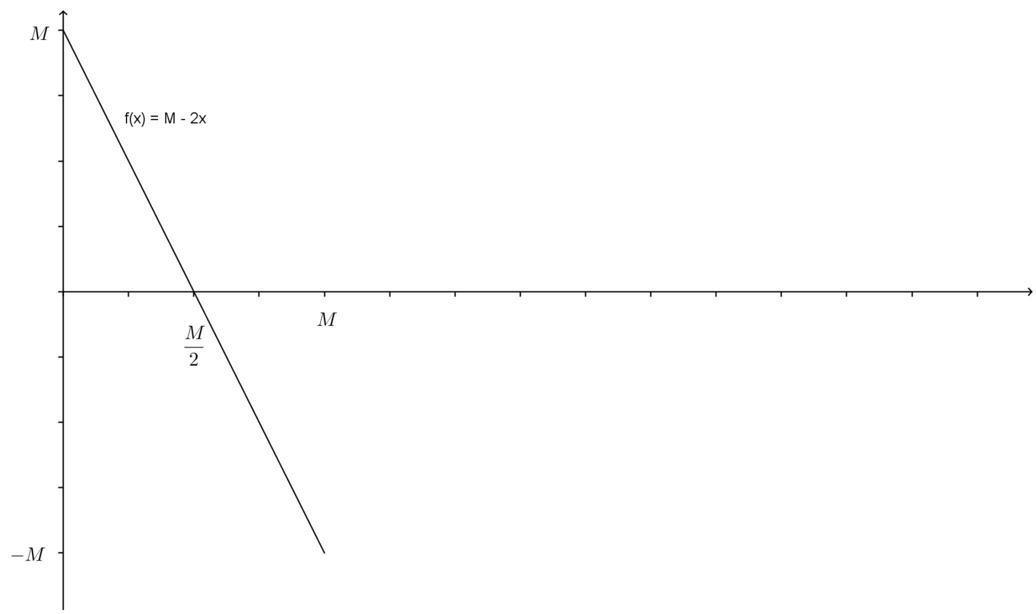
Mithin:

$$|B'(t)| \leq |r|B(t)(M - B(t)) \leq |r|\frac{M^2}{4} \tag{5}$$

Die zweite Ableitung berechnet sich aus der ersten unter Anwendung der Produktregel:

$$B''(t) = r(B'(t)(M - B(t)) - B(t)B'(t)) = rB'(t)(M - 2B(t)) \tag{6}$$

Eine Funktion $f(x) = M - 2x$ hat im Intervall [0, M] vom Betrage her maximal den Wert M.



Jetzt kann man mit Hilfe von (5) abschätzen:

$$|B''(t)| \leq |r||r|\frac{M^2}{4}M = r^2\frac{M^3}{4} \tag{7}$$