1 Werkzeuge der Wahrscheinlichkeitsrechnung

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung unterscheidet man zwischen diskreten und kontinuierlichen Aufgabenstellungen. Bereits die Definition der Wahrscheinlichkeit unterscheidet sich nach diesen beiden Bereichen.
Die diskrete Formel (für Laplace-Experimente) als „Anzahl der günstigen Fälle“ geteilt durch „Anzahl der möglichen Fälle“ lässt sich auf kontinuierliche Aufgaben nicht anwenden, da der Begriff „Anzahl“ eine abzählbare Grundmenge voraussetzt und dies bei kontinuierlichen Aufgabenstellungen eo ipso nicht gegeben ist.
Ich habe nicht vor, die ganze Wahrscheinlichkeitsrechnung hier aufzurollen, sondern will nur die benötigten Formeln zusammenstellen und erläutern.
Die üblichen Bezeichnungen für die Bestandteile des Wahrscheinlichkeitsraumes (Ω, Σ, P) sind:

- Ω als Ergebnismenge eines Zufallsexperimentes
- ein Ereignis ist eine Teilmenge von Ω, ein Elementarereignis eine einelementige Teilmenge von Ω
- Σ als Ereignisraum über Ω , also eine Menge von Teilmengen (=Ereignissen) von Ω
- P als Wahrscheinlichkeitsmaß - kurz Wahrscheinlichkeit, eine Abbildung von Σ in das Intervall $[0, 1]$, ordnet also jedem Ereignis seine Wahrscheinlichkeit zu

Im <u>diskreten</u> Fall, d.h. bei abzählbarer Ergebnismenge Ω, hat man für den Fall eines Laplace-Experimentes einfache Aussagen für die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen.
Sei also Ω endlich ($|\Omega| = n$) und alle Elementarereignisse von gleicher Wahrscheinlichkeit ($P = \frac{1}{n}$). Dann gilt die oben schon verbal formulierte Formel für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $A \in \Sigma$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n_A}{n} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} \tag{1}$$

Im <u>kontinuierlichen</u> Fall, d.h. bei einer überabzählbaren Ergebnismenge Ω, ist, wie schon gesagt, ein Zählen innerhalb überabzählbarer Ereignisse

nicht mehr möglich. Deshalb definiert man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mittels eines Integrals über das Ereignis und einer sog. Wahrscheinlichkeitsdichte, die ich p nennen will. Ohne den maßtheoretischen Unterbau auch nur zu erwähnen, schreibe ich:
Sei $A \subseteq \Omega$ und $p : \Omega \to [0, \infty)$ eine Abbildung mit $\int_\Omega p(x)dx = 1$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A:

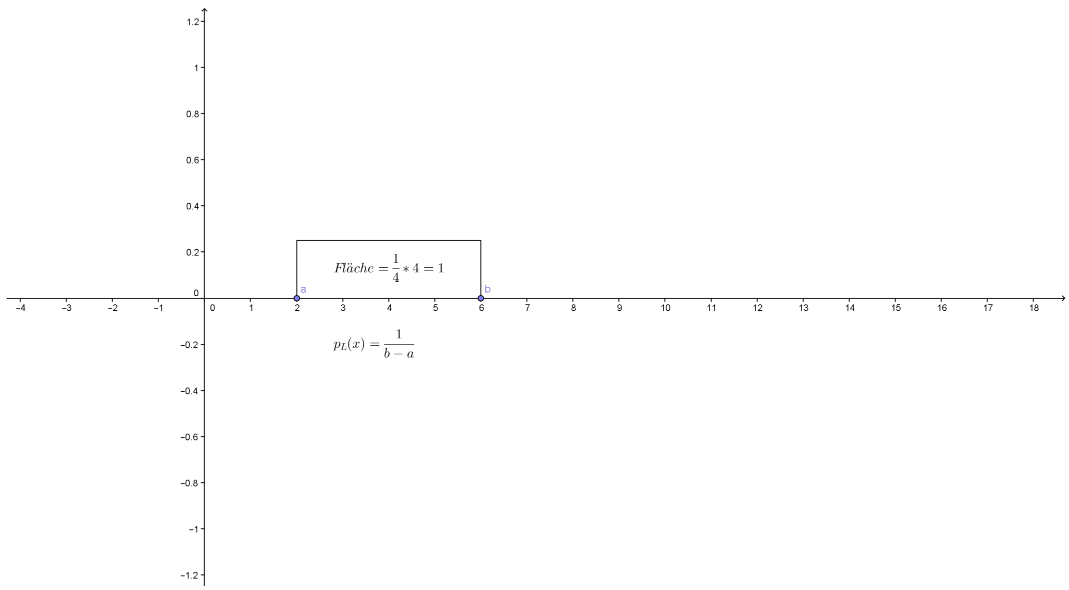
$$P(A) = \int_A p(x)dx \tag{2}$$

Für einelementige Mengen A (oder Nullmengen) hat dieses Integral den Wert 0.
Tatsächlich benötige ich diese Definition im $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$.
Hinzu kommt der Begriff der Zufallsvariable (hier X genannt); sie repräsentiert letztlich den Wert eines Zufallsexperimentes als reellwertige Größe (Punkt des $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^2$). Für $\mathbb{R}$ ergibt sich:

$$P([u, v]) = \int_u^v p(x)dx \text{ bzw. } P(X \in [u, v]) = \int_u^v p(x)dx \tag{3}$$

Mit anderen Worten: Die Wahrscheinlichkeit, dass sich bei einem Zufallsexperiment der Wert einer Zufallsvariable X in einem Intervall $[u, v]$ findet, wird durch das angegebene Integral $\int_u^v p(x)dx$ bestimmt. Hier ist $A = [u, v]$.
Im $\mathbb{R}^2$ muß die obige allgemeine Definition herhalten, wobei $\Omega = \mathbb{R}^2$.
Tolle Sache das!
Aber wie findet man die notwendige Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x)$? Nun, für die Zwecke dieses Artikels ist die Frage leicht zu beantworten. Die Verallgemeinerung des Laplace - Experimentes auf kontinuierliche Anwendungen gelingt mit folgender Wahrscheinlichkeitsdichte p_L:

$$p_L(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 \text{ sonst} & \end{cases} \tag{4}$$



p_L ist nicht negativ und stellt sich im zweidimensionalen Koordinatensystem als Rechteck der Breite $b - a$ und der Länge $\frac{1}{b-a}$ dar und hat somit die Fläche 1, was p_L als Wahrscheinlichkeitsdichte qualifiziert. Die Wahrscheinlichkeit, dass X in einem Teilintervall $[u, v]$ von $[a, b]$ liegt, berechnet sich somit einfach zu

$$P(X \in [u, v]) = \int_u^v p_L(x)dx = \frac{u - v}{b - a}, \tag{5}$$

was dem diskreten Wahrscheinlichkeitswert des Laplace - Experimentes entspricht.
Im $\mathbb{R}^2$ ersetzt man das Intervall $[a, b]$ durch ein Rechteck $Q = [a, b] \times [c, d]$ und definiert $p_L(x, y)$ als auf diesem Rechteck konstante Funktion vom Wert $\frac{1}{(b-a)(d-c)}$ und außerhalb des Rechtecks vom Wert 0. Für die Wahrscheinlichkeit, dass eine (zweidimensionale) Zufallsvariable X in einer Teilmenge A von Q liegt, ergibt sich nunmehr der Wert

$$P(X \in A) = \int_A p_L(x, y)dxdy = \frac{1}{(b - a)(d - c)} \int_A dxdy = \frac{\text{Fläche(A)}}{\text{Fläche(Q)}} \tag{6}$$

Soweit zunächst die Darstellung der Werkzeuge.

2 Hit or Miss

Die Hit oder Miss - Methode zur Berechnung von zwei- (oder mehr-) dimensionalen Volumina ergibt sich nun in einfacher Weise aus den Formeln des Kapitels 1. Dazu betrachten wir allgemein die Aufgabenstellung der Berechnung einer (meßbaren) Fläche A im $\mathbb{R}^2$, die in einem Rechteck $[a,b] \times [c,d]$ eingeschlossen ist. Gleichung (6) liefert bereits das gesamte notwendige Handwerkszeug. Die Wahrscheinlichkeit $P(X \in A)$ wird durch die Pascalprogramme mittels Formel (1) simuliert, d.h.

$$\frac{n_A}{n} \approx \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_A dxdy \Rightarrow \tag{7}$$

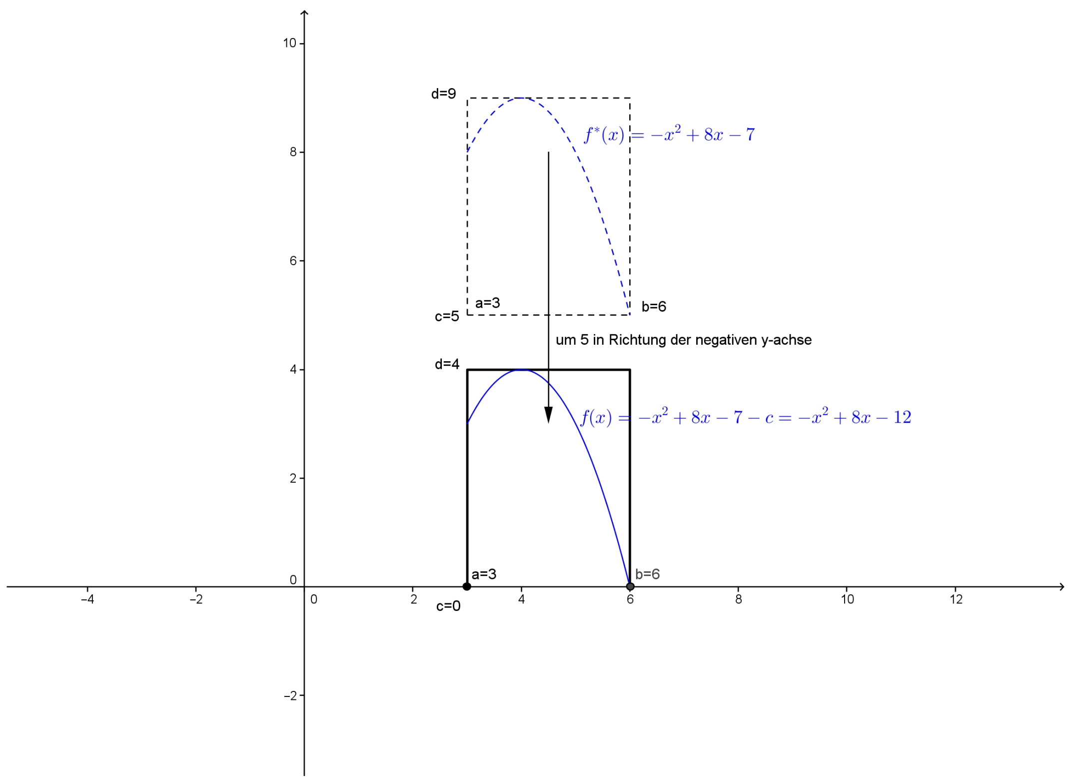
$$\text{Fläche(A)} \approx \frac{n_A}{n}(b-a)(d-c), \tag{8}$$

wobei n die Anzahl der „Regentropfen" im Rechteck insgesamt und n_A die der Regentropfen ist, die A treffen.

Im Falle des Viertelkreises, der zur Berechnung von π herangezogen wurde, ist $a = c = 0, b = d = 1$ und der Radius des Kreises $= 1$ und wir erhalten für π :

$$\pi \approx 4\frac{n_A}{n} \tag{9}$$

Betrachten wir nun den Fall, dass die zu berechnende Fläche A als eindimensionales Integral über einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dargestellt werden kann: $\text{Fläche}(A) = \int_a^b f(x)dx - (b-a)c$. Der unschöne Term $-(b-a)c$ entsteht durch den Einschluß der Fläche in das Rechteck $[a,b] \times [c,d]$ und die Tatsache, dass das eindimensionale Integral immer die Fläche bis zur x-Achse einschließt. Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir $c = 0$, was nichts anderes bedeutet, als dass wir f und das Rechteck um c in Richtung der negativen y-Achse verschieben.



Auch hier ist die Hit or Miss - Methode anwendbar, spezialisiert auf diesen Fall lautet Gleichung (5) dann:

$$\frac{n_A}{n} \approx P(X \in A) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)d}. \tag{10}$$

Das Beispiel $f(x) = -x^2 + 1$ in $[0, 1]^2$ aus dem Pascalprogramm wird damit zu $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{n_A}{n}$.

3 Näherung durch Summation

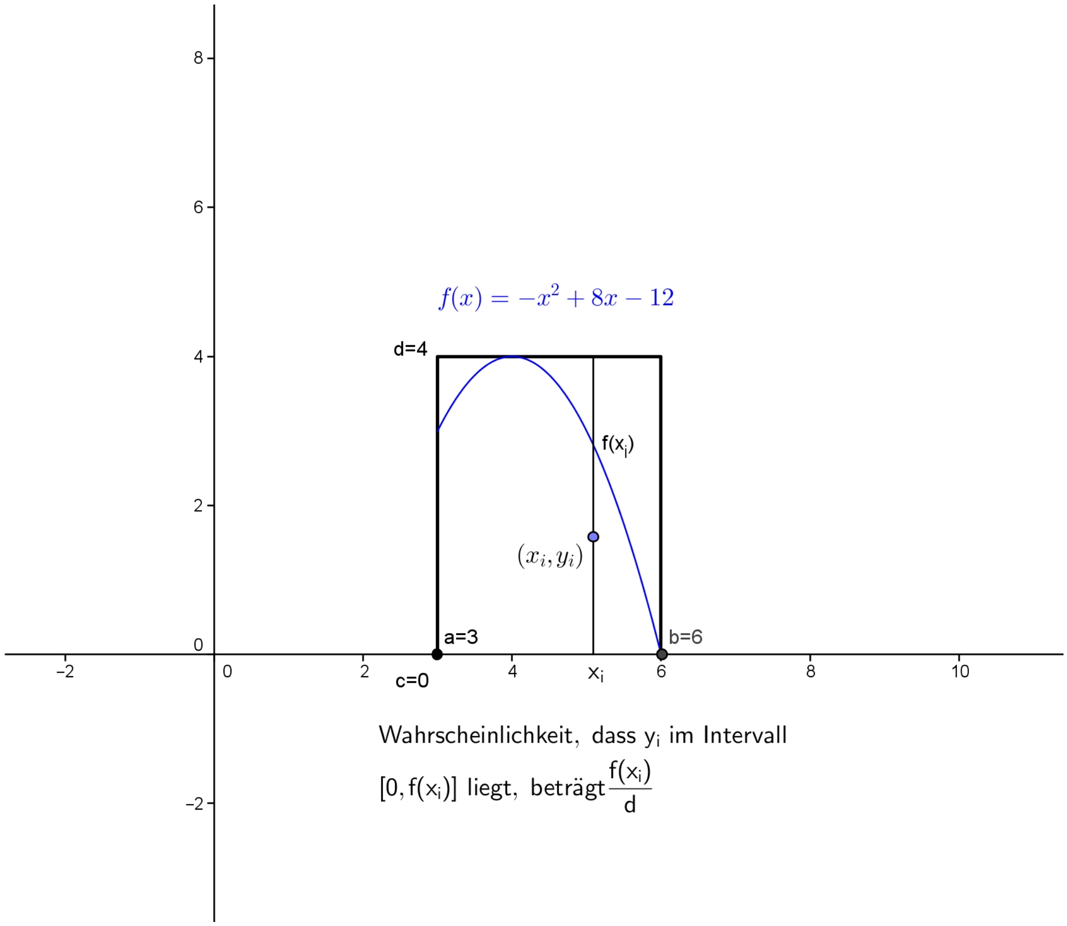
In dem zweiten Pascalprogramm zur Näherung der Fläche unter einer Kurve wurde statt der Hit or Miss - Methode eine Rechtecksummation mit zufälligen Stützstellen $x_i, i = 1 \dots n$ verwendet:

$$\text{Fläche}(A) \approx \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \tag{11}$$

Dieser Ansatz rechtfertigt sich allein schon aus der Ähnlichkeit zur Definition des Riemannintegrals. Aber man kann sogar einen Zusammenhang mit der Hit or Miss - Methode konstruieren. Der Aufsatz, in dem ich diesen Hinweis im Internet fand
(`http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/files/2011_bericht_frank.pdf`), spricht an dieser Stelle von einer „längeren intuitiven Rechnung“ , eine wunderschöne Formulierung, allerdings mit dem Nachteil, dass diese Rechnung an dortiger Stelle leider nicht veröffentlicht ist. Ich habe deshalb selber mal versucht, meine Intuition mit mathematischer Exaktheit zu paaren und bin auf folgendes gekommen.
Hit or Miss, wie (10):

$$P(X \in A) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)d} \tag{12}$$

Rechtecksummation:
Nehmen wir an, dass bei der Hit or Miss - Methode der zu testende Punkt (x_i, y_i) ist. Für die weitere Überlegung betrachten wir für jedes x_i die Strecke zwischen $(x_i, 0)$ und (x_i, d). Auf dieser Strecke liegt der Funktionswert $f(x_i)$, genauer der Punkt $(x_i, f(x_i))$. Die Wahrscheinlichkeit, den Wert y_i im Intervall $[0, f(x_i)]$, also letztlich innerhalb der zu berechnenden Fläche A zu finden, ist nach (5) gerade $\frac{f(x_i)}{d}$ mit $v = f(x_i), b = d, a = 0$ und $u = 0$; in der Wahrscheinlichkeitsdichte p_L wird mithin b durch d und a durch 0 ersetzt.



Und jetzt der intuitive Teil der Überlegung: Bildet man nun den Durchschnitt der Wahrscheinlichkeiten über alle $x_i, i = 1 \dots n$, so erhält man für die Wahrscheinlichkeit $P(X \in A)$ einen Näherungswert der Form:

$$P(X \in A) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{d} \tag{13}$$

Der Rest ist einfach, denn jetzt vergleicht man nur noch die Gleichungen (12) und (13) und sieht:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)d} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{d} \Rightarrow \tag{14}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \tag{15}$$

und erhält damit die Gleichung (11).