Harmonische Funktionen auf diskreten Mengen

Der Begriff „harmonische Funktion“ ist vornehmlich aus der Analysis bekannt und wird dort also auf kontinuierlichen Definitionsbereichen betrachtet. Hier betrachte ich statt dessen Funktionen auf diskreten Definitionsbereichen.

Definition 1 *Wir betrachten einen einfachen (endlichen) zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$. V bestehe aus zwei disjunkten nichtleeren Teilmengen I und A : $V = I \dot{\cup} A$ mit folgender Eigenschaft:*
(i) Keine zwei Knoten aus A sind durch eine Kante miteinander verbunden.
Eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ heißt harmonisch, wenn für jeden Knoten $v \in I$ gilt: $f(v) = \frac{1}{d_G(v)} \sum_{w \in N_v} w$. Dabei bezeichne N_v die Menge der Nachbarknoten von v. (Mittelwerteigenschaft, da $|N_v| = d_G(v)$.) Weiterhin nennen wir A die Menge der äußeren Knoten und I die Menge der inneren.

Aus (i) und dem Zusammenhang von G folgt, dass jeder Knoten von A mit mindestens einem Knoten von I verbunden ist.
Die Begriffe äußerer und innerer Knoten sind nicht dahingehend misszuverstehen, dass die äußeren Knoten etwa unbedingt am Rand des Graphen liegen müssen (siehe Zufallswanderer im Haupttext). Nun gelten 2 Aussagen für harmonische Funktionen:

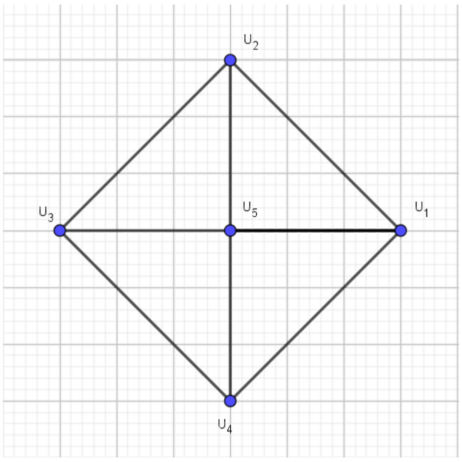
Satz 1 *Maximum-Minimup-Prinzip*
Jede harmonische Funktion f(x) nimmt ihr Maximum M und ihr Minimum m in einem äußeren Knoten also einem Element von A an.

Beweis:
Angenommen das Maximum wird in $v \in I$, also einem inneren Knoten angenommen: $f(v) = M$. Dann gilt auch für alle Nachbarknoten w von v, dass $f(w) = M$, da $f(v)$ Mittelwert seiner Nachbarknoten ist. Entweder ist einer der Nachbarknoten ein äußerer, dann sind wir fertig oder wir wenden das gleiche Argument auf einen Nachbarknoten an, bis wir einen Randknoten erreicht haben.

Satz 2 *Eindeutigkeitsprinzip*
Eine harmonische Funktion ist durch die Werte auf den äußeren Knoten eindeutig bestimmt.

Beweis:
Seien f und g zwei harmonische Funktionen mit identischen Werten auf den Randknoten. Mit f und g ist auch die Funktion $f-g$ harmonisch (nachrechnen). $f - g$ ist somit auf den Randknoten Null und wegen des Maximum-Minimum-Prinzips muss sie überall Null sein. Damit ist $f = g$.

Der Grund für die identischen Lösungen des Zufallswanderers und des Gleichstromnetzwerkes liegt eben darin, dass die Wertefunktionen bei beiden Anwendungen harmonisch sind und ansonsten die Funktionswerte auf den Randknoten identisch gewählt wurden. Im Falle des Zufallswanderers wurde dies im Text des gleichnamigen Kapitels (Formel (*)) bereits gezeigt. Beim Gleichstromkreis folgt dies aus den Kirchhoffschen Gesetzen, um genau zu sein, aus der Maschenregel. Um das zu verstehen betrachten wir folgendes kleine Netzwerk:



Die eingezeichneten Spannungen $U_1 - U_5$ sind Spannungen gegenüber einem Nullpotential (Minuspol der Batterie). Wir bezeichnen mit $U_{ij} = U_i - U_j$, also die Spannungen zwischen den U_i. Die Maschenregel ist darauf anwendbar und sagt nun aus: $U_{15} + U_{25} + U_{12} = 0$. Entsprechend für die anderen 3 dreieckigen Maschen.
Addiert man diese 4 Gleichungen, erhält man:

$$2 \cdot (U_{15} + U_{25} + U_{35} + U_{45}) + U_{12} + U_{23} + U_{34} + U_{41} = 0$$

Durch Ersetzten der U_{ij} ergibt sich:

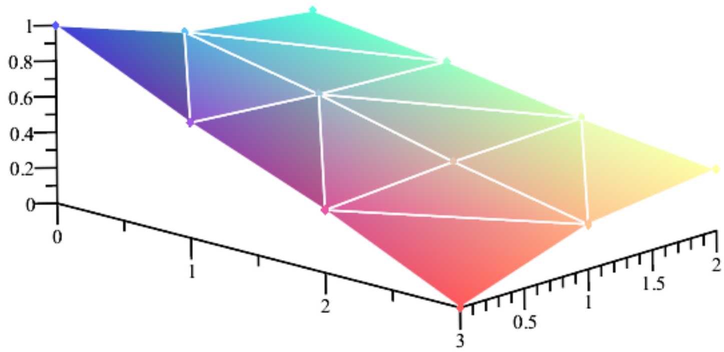
$$2 \cdot (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 - 4U_5) + U_1 - U_2 + U_2 - U_3 + U_3 - U_4 + U_4 - U_1 = 0$$

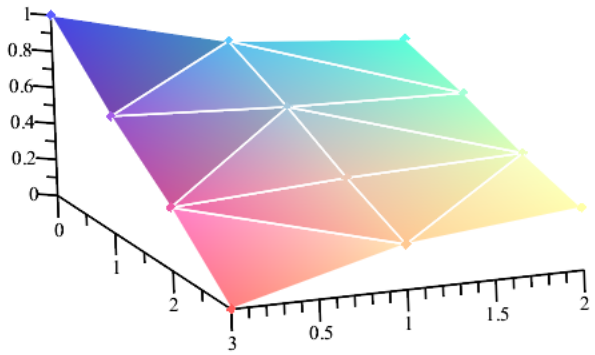
Es folgt:

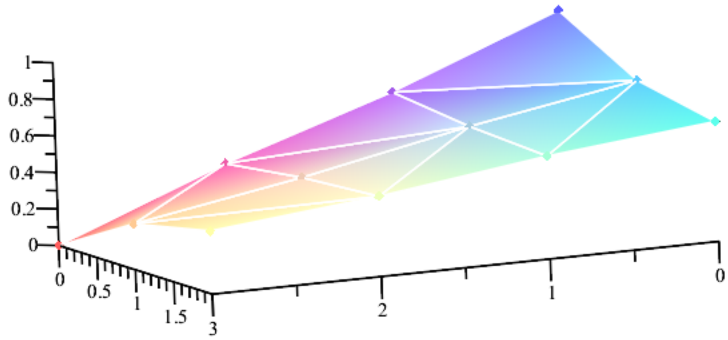
$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 - 4U_5 = 0 \Rightarrow U_5 = \frac{1}{4}(U_1 + U_2 + U_3 + U_4),$$

also genau die harmonische Eigenschaft für U_5. Außerdem sieht man, dass sich die Spannungen zwischen den äußeren Knoten ($U_{12} - U_{41}$) zu Null addieren, d.h. es ist egal wie die Maschen an diesen Stellen tatsächlich aussehen.

Um eine Vorstellung vom Aussehen einer harmonischen Funktion auf einer diskreten Menge zu erhalten, habe ich das dem Gleichstromnetzwerk (id. Zufallswanderer) zugrundeliegende Gitter mir den Spannungs- (= Zufalls-) Werten als 3-dimensionale Grafik von Maple zeichnen lassen. Wie schon im Haupttext erwähnt, sei hier nochmals darauf hingewiesen, dass die Geometrie des Netzes (Längen, Winkel) keinen Einfluss auf die harmonische Wertefunktion hat; lediglich die Anzahl der Nachbarknoten spielt eine allerdings entscheidende Rolle. Die folgenden Abbildungen zeigen den Oberflächenplot für das genannte Problem.


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
1
2
3
0.5
1
1.5
2


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
1
2
3
0.5
1
1.5
2



Eine zweite Bemerkung sei hier noch gemacht. Die Voraussetzungen an eine harmonische Funktion lassen es zu, dass A nicht nur zwei Knoten, wie in den Beispielen aus dem Hauptaufsatz der Fall ist, enthält. Vielmehr ist die endliche Anzahl nur durch die Bedingungen an die harmonische Funktion geregelt.
Außerdem teilt sich A bei geeigneten Problemen nochmals in zwei Untermengen auf: die „guten" und die „schlechten" äußeren Knoten; gut und schlecht im Sinne des Zufallswanderers, in unserem Beispiel „Ausgang" und „Falle". Das Aussehen des linearen Gleichungssystems zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten ist dann nur insoweit zu modifizieren, dass eben mehr Wahrscheinlichkeiten 0.0 oder 1.0 für den Vektor p vorgegeben sind und der Grad des tatsächlich zu lösenden Gleichungssystem entsprechend geringer wird.

Literatur: F. Kaderali, W. Poguntke, Graphen, Algorithmen und Netze